Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Classes: 1ère année GM & MIndS
Enseignant: M. Trifa

Année Universitaire 2017/2018
Les documents ne sont pas autorisés
Durée 2h00

Devoir surveillé de Mécanique des Milieux Continus

Exercice 1: (/8 points)

On considère le mouvement d'un milieu continu défini par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 e^{-2\alpha t} \\ x_2 = (X_2 - X_1) e^{\alpha t} + X_1 e^{-2\alpha t} \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

où (X_1, X_2, X_3) et (x_1, x_2, x_3) sont les coordonnées cartésiennes de la position d'un point matériel respectivement à l'état initial ($t=0$) et à l'instant t ; α est une constante.

1. Déterminer le tenseur gradient de la transformation. Que peut-on dire de cette transformation ? [1]
2. Calculer le volume à l'instant t d'un domaine matériel de forme initiale cubique de coté a. [1]
3. Calculer les composantes de la vitesse d'une particule en fonction des coordonnées de Lagrange. [0.5]
4. Exprimer à l'instant t, le champ des vitesses en variables d'Euler. [1]
5. Peut on dire que le mouvement est stationnaire ? Justifier la réponse. [0.5]
6. Calculer les composantes du tenseur gradient des vitesses. en variable d'Euler [1]
7. Calculer les composantes de l'accélération d'une particule en fonction des coordonnées d'Euler. [1]
8. Donner l'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule (X_1, X_2, X_3). [1]
9. Donner l'équation cartésienne des lignes de courant à l'instant t. [1]

On notera que : $$(x_2 - x_1)\left[(x_2 - 3x_1)dx_1 + 2x_1 dx_2\right] = d\left[x_1(x_2 - x_1)^2\right]$$

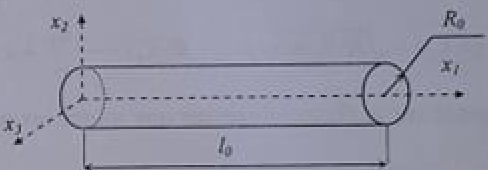
Exercice 2: (/6 points)

On considère une barre cylindrique de longueur l_0, de section circulaire de rayon R_0.

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé cartésien tel que $\vec{e}_1$ est porté par l'axe de la barre.

On suppose qu'à partir de sa configuration initiale, la barre subit une transformation définie par :

$$\begin{cases} x_1 = X_1 - \eta X_1 X_2 \\ x_2 = X_2 + \eta \dfrac{X_1^2}{2} + \delta \dfrac{X_2^2}{2} - \delta \dfrac{X_3^2}{2} - \psi X_1 X_3 \\ x_3 = X_3 + \delta X_2 X_3 + \psi X_1 X_2 \end{cases}$$



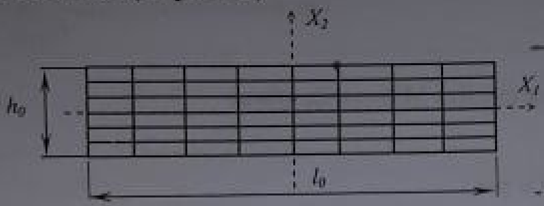
Où (X_1, X_2, X_3) sont les coordonnées cartésiennes d'un point matériel dans la configuration initiale et (x_1, x_2, x_3) ses coordonnées dans la configuration déformée. η, δ et ψ sont des fonctions du temps données.

1. Déterminer le champ des tenseurs gradients de la transformation. [1]
2. Déterminer le champ des déplacements et son gradient. [1]
3. Etablir l'équation de la déformée de la fibre moyenne ($X_2 = X_3 = 0$) de la barre. [0.5]

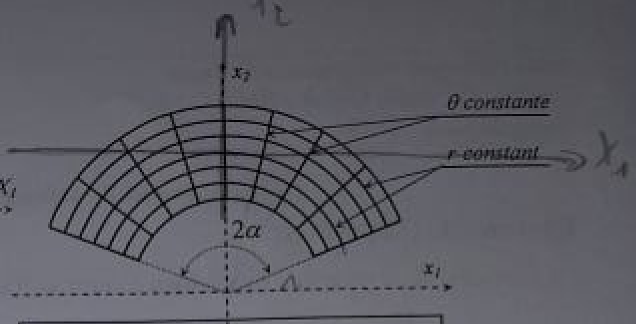
Dans la suite on se place dans <u>l'hypothèse de transformation infinitésimale</u>.

4. Déterminer le champ des tenseurs de déformations linéarisés. [0.5]
5. Calculer le volume de la barre après déformation. [1]
6. Quelles conditions doivent vérifier les fonctions η, δ et ψ pour qu'en tout point la transformation se fasse <u>localement</u> sans variation de volume. [0.5]
7. Calculer la longueur après déformation de la fibre qui relie les points matériels M_{01} $(0, R_0, 0)$ et M_{02} $(l_0, R_0, 0)$. [1]
8. Dans le cas où $\eta = \delta = 0$, comment se traduit l'hypothèse de transformation infinitésimale sur la fonction ψ. [0.5]

Exercice 3: (/6 points)



Configuration de référence



Configuration finale déformée

La figure ci-dessus représente la transformation d'un bloc rectangulaire (l_0 x h_0 x L_0) en une portion de tube cylindrique de longueur L_0 et d'angle 2α.

Pour décrire cette transformation, dite flexion circulaire, on utilise le repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sur la configuration de référence et le repère orthonormé en coordonnées cylindriques $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_3)$ sur la configuration finale déformée.

Le vecteur position initiale d'une particule est: $\vec{X} = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$; sa position finale est repérée par les coordonnées cylindriques suivantes : $r = g(X_2)$, $\theta = k(X_1)$, $z = X_3$.

Le vecteur position actuelle est donc : $\vec{x} = \vec{f}(\vec{X}) = g(X_2)\,\vec{e}_r(X_1) + X_3\vec{e}_3$

1. Calculer les composantes du tenseur gradient de la transformation $\overline{\overline{F}}(\vec{X}) = \overline{\overline{Grad}}\,\vec{f}(\vec{X})$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. [1]
2. En déduire que les fonctions g et k doivent être telles que : $g(X_2)\, g'(X_2) k'(X_1) < 0$. [1]
3. La flexion circulaire est maintenant supposée se produire <u>localement</u> à volume constant. Montrer que les fonctions g et k sont nécessairement de la forme : [2]

$$g(X_2) = \sqrt{2cX_2 + b} \quad , \qquad k(X_1) = -\frac{X_1}{c} + a \qquad \text{où a, b, c sont des constantes.}$$

4. En remarquant sur la figure ci-dessus que toutes les particules de coordonnée $X_1=0$ se trouvent après déformation sur la ligne $\theta = \frac{\pi}{2}$ et que toutes les particules de coordonnée $X_1=l_0/2$ se trouvent après déformation sur la ligne $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, déterminer les constantes a et c, montrer que : [1]

$$r = g(X_2) = \sqrt{\frac{l_0}{\alpha} X_2 + b} \quad , \qquad \theta = k(X_1) = -\frac{2\alpha}{l_0} X_1 + \frac{\pi}{2}$$

5. La figure ci-dessus suggère l'existence d'une fibre (dite fibre neutre) de cote $X_2=d$ ne subissant aucun allongement et séparant la région du bloc rectangulaire où les lignes X_2=Cste se sont allongées de la région où ces lignes se sont raccourcies.

Montrer que la constance b est telle que : $$b = \frac{l_0}{2\alpha}\left(\frac{l_0}{2\alpha} - 2d\right).$$ [1]